DELTA TopGun

10 - Úvod do teorie grafů

Tomáš Faltejsek, Luboš Zápotočný, Michal Havelka

2022

Úvod

"Zjednodušení reálného světa, kde je problém znázorněn pomocí bodů a čar které je spojují."

Terminologie v teorii grafů

- takové body nazýváme **vrcholy grafu**
- *"čáry"*, které tyto body propojují nazýváme **hrany grafu**

Značení

- V: množina vrcholů (*verticies*)
- E: množina hran (*edges*)
- $G = (V, E)$: graf G je **uspořádanou** dvojicí množin V a E
- **Smyčka**: hrana z vrcholu x do vrcholu x

Orientovaný vs neorientovaný graf

rekapitulace z přednášky stromové struktury

- **Neorientovaný graf** $G(V, E)$ tedy definujeme jako **uspořádanou** dvojicí množin V a E
- **Orientovaný graf** definujeme analogicky, pouze každé hraně dodáme orientaci. Tj. jeden z vrcholů hrany prohlásíme za počáteční a druhý z vrcholů hrany za koncový. Graficky orientaci hrany znázornímě *jednostrannou šipkou*

Ohodnocení uzlu či hrany

Graf rovněž může být *hranově* či *vrcholově ohodnocený*. Hraně či vrcholu můžeme přidělit libovolné reálné číslo (**ohodnocení**).

Úplný graf

Úplný graf je takový graf, ve kterém jsou každé dva vrcholy spojené hranou. Takový graf značíme K_n, kde n je počet vrcholů.

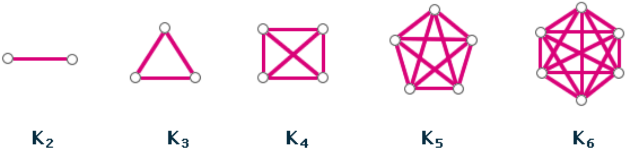


Figure: Úplné grafy s různým počtem vrcholů (převzato)

Úplný graf

Úplný graf je takový graf, ve kterém jsou každé dva vrcholy spojené hranou. Takový graf značíme K_n, kde n je počet vrcholů.

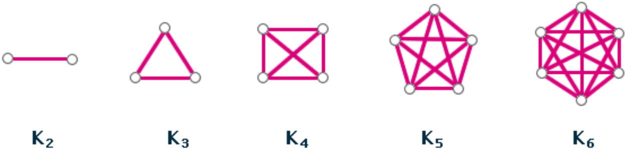


Figure: Úplné grafy s různým počtem vrcholů (převzato)

Otázka

Tvoří množiny V a E, kde $|V| = 1$ a $|E| = 0$, graf?

Úplný graf

Úplný graf je takový graf, ve kterém jsou každé dva vrcholy spojené hranou. Takový graf značíme K_n, kde n je počet vrcholů.

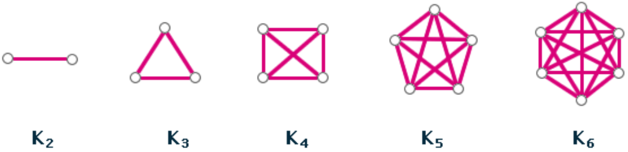


Figure: Úplné grafy s různým počtem vrcholů (převzato)

Otázka

Tvoří množiny V a E, kde $|V| = 1$ a $|E| = 0$, graf? A co obráceně?

Podgraf

"*Podgraf grafu G je graf G', který vznikl odebráním některých vrcholů a hran z původního grafu G.*"

Máme-li graf $G = (V, E)$ a jsou-li V' a E' podmnožiny V a E a platí, že $G' = (V', E')$ je grafem. Pak nazýváme G' **podgrafem** grafu G.

Pokud platí $V' = V$ (*podgraf obsahuje všechny vrcholy původního grafu*), pak nazýváme G' *faktorem* grafu G.

Sled, tah, cesta

- **sled**
  - posloupnost uzlů V_i a hran E_i
- **tah**
  - *sled*, ve kterém se **neopakují hrany**
- **cesta**
  - *tah*, ve kterém se **neopakují uzly**
- **uzavřená cesta (= kružnice)**
  - cesta, ve které se shoduje první a poslední uzel

Kružnice

Kružnicí (resp. *cyklem*) rozumíme posloupnost vrcholů a hran $(V_0, E_1, V_1, \ldots, E_t, V_t = V_0)$ kde vrcholy $V_0, \ldots, V_t$ jsou navzájem různé vrcholy grafu G.

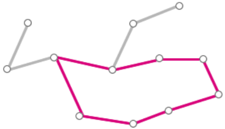


Figure: Příklad kružnice (převzato)

Poznámka

Neorientovaný graf bez kružnic nazýváme **les**. *Souvislý les* pak nazýváme **strom**.

Bipartitní graf

Bipartitní graf je takový graf, jehož množinu vrcholů lze rozdělit na dvě části, tak, že z každého vrcholu jedné části jde hrana pouze do vrcholů druhé části a naopak.

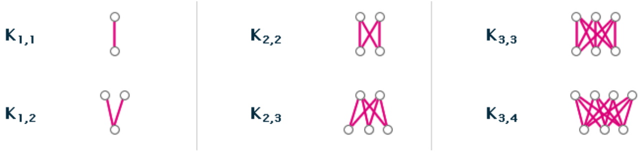
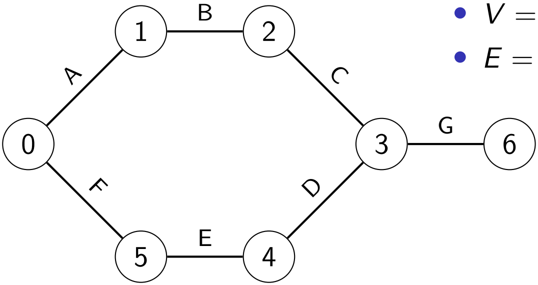


Figure: Bipartitní grafy (převzato)

Pokud jde z každého vrcholu jedné části hrana do každého vrcholu druhé části, mluvíme o **úplném bipartitním grafu**.

Graf



- $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $E = \{A, B, C, D, E, F, G\}$

Eulerova úloha

Je možné projít každým mostem ve městě právě jednou a vrátit se zpět do původního místa? *Euler matematicky dokázal, že úloha není řešitelná*

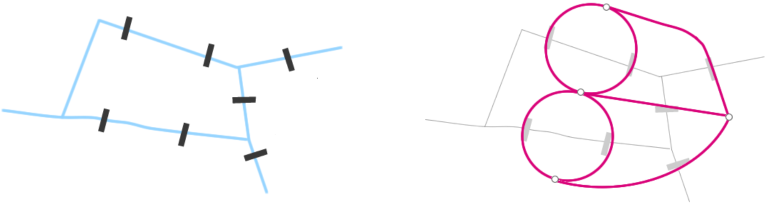
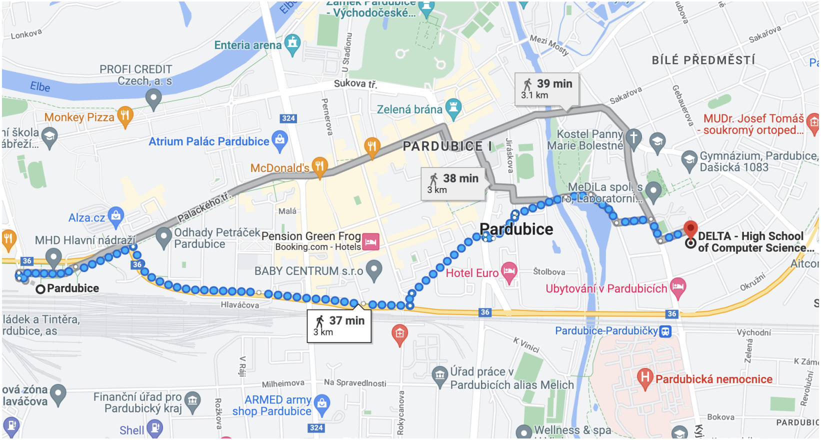


Figure: Sedm mostů města Königsbergu (převzato)

Mapa - nalezení nejkratší cesty



Reprezentace grafů obecně

Náležitosti reprezentace:

- musí popisovat množinu vrcholů **V**
- množinu hran **H**
- incidenční zobrazení **f**

Metody reprezentace:

1. maticová reprezentace
2. reprezentace formou seznamu (počítačové zpracování)

Matice sousednosti

- matice **uzel** - **uzel**
- v neoreintovaném grafu je matice symetrická
- hodnota prvku na indexu a_{ij} odpovídá počtu hran vedoucích z vrcholu i do j

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poznámka

u orientovaných grafů je hodnota prvku v i-tém sloupci a j-tém řádku 1, pokud je i-tý vrchol počátečním vrcholem j-té hrany, a -1, pokud je jejím koncovým vrcholem

Matice sousednosti - složitost operací

- Prostorová složitost

Matice sousednosti - složitost operací

- Prostorová složitost $\mathcal{O}(|V|^2)$
- Časová složitost kontroly existence hrany

Matice sousednosti - složitost operací

- Prostorová složitost $\mathcal{O}(|V|^2)$
- Časová složitost kontroly existence hrany $\mathcal{O}(1)$
- Časová složitost přidání hrany

Matice sousednosti - složitost operací

- Prostorová složitost $\mathcal{O}(|V|^2)$
- Časová složitost kontroly existence hrany $\mathcal{O}(1)$
- Časová složitost přidání hrany $\mathcal{O}(1)$
- Časová složitost odebrání hrany

Matice sousednosti - složitost operací

- Prostorová složitost $\mathcal{O}(|V|^2)$
- Časová složitost kontroly existence hrany $\mathcal{O}(1)$
- Časová složitost přidání hrany $\mathcal{O}(1)$
- Časová složitost odebrání hrany $\mathcal{O}(1)$
- Časová složitost přidání vrcholu

Matice sousednosti - složitost operací

- Prostorová složitost $\mathcal{O}(|V|^2)$
- Časová složitost kontroly existence hrany $\mathcal{O}(1)$
- Časová složitost přidání hrany $\mathcal{O}(1)$
- Časová složitost odebrání hrany $\mathcal{O}(1)$
- Časová složitost přidání vrcholu $\mathcal{O}(|V|^2)$

Matice incidence

- matice **vrchol - hrana**
- využití u grafů bez smyček
- v neorientovaném grafů má prvek a_{ij} hodnotu 1 pokud je i-tý vrchol počátečním vrcholem j-té hrany, jinak 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poznámka

u orientovaných grafů je hodnota 1 u počátečního uzlu hrany a -1 u koncového uzlu hrany

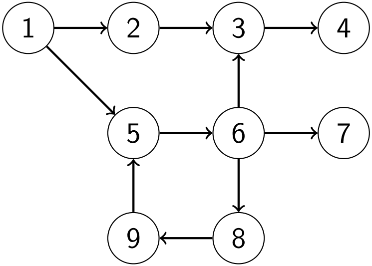
Další maticové reprezentace

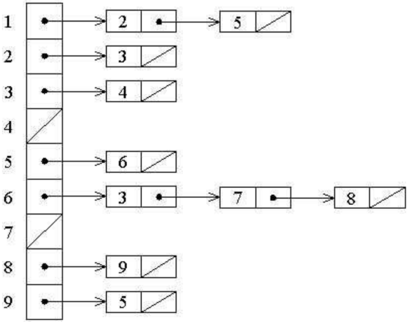
- matice dostupnosti
- matice vzdálenosti
- ...

Spojový seznam sousednosti

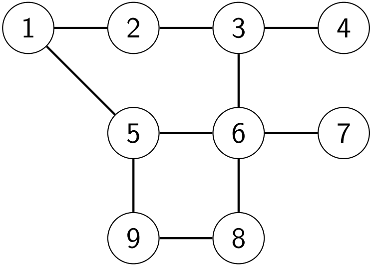
- pro každý vrchol ukládáme seznam sousedů
- sousedící vrcholy jsou uloženy v seznamech (v libovolném pořadí)

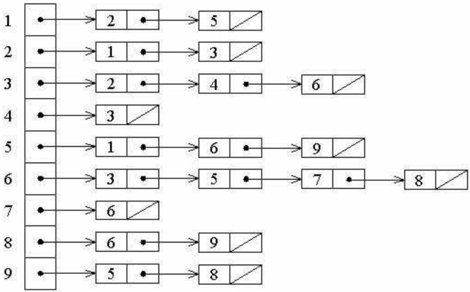
Spojový seznam sousednosti - orientovaný graf





Spojový seznam sousednosti - neorientovaný graf





Spojový seznam sousednosti - složitost operací

- Prostorová složitost

Spojový seznam sousednosti - složitost operací

- Prostorová složitost $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- Časová složitost kontroly existence hrany

Spojový seznam sousednosti - složitost operací

- Prostorová složitost $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- Časová složitost kontroly existence hrany $\mathcal{O}(|V|)$
- Časová složitost přidání hrany

Spojový seznam sousednosti - složitost operací

- Prostorová složitost $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- Časová složitost kontroly existence hrany $\mathcal{O}(|V|)$
- Časová složitost přidání hrany $\mathcal{O}(1)$
- Časová složitost odebrání hrany

Spojový seznam sousednosti - složitost operací

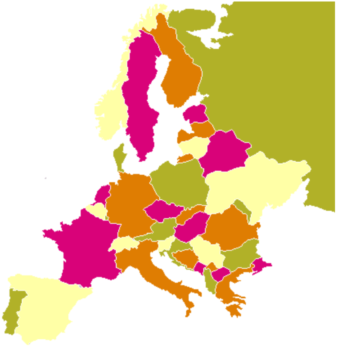
- Prostorová složitost $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- Časová složitost kontroly existence hrany $\mathcal{O}(|V|)$
- Časová složitost přidání hrany $\mathcal{O}(1)$
- Časová složitost odebrání hrany $\mathcal{O}(|E|)$
- Časová složitost přidání vrcholu

Spojový seznam sousednosti - složitost operací

- Prostorová složitost $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- Časová složitost kontroly existence hrany $\mathcal{O}(|V|)$
- Časová složitost přidání hrany $\mathcal{O}(1)$
- Časová složitost odebrání hrany $\mathcal{O}(|E|)$
- Časová složitost přidání vrcholu $\mathcal{O}(1)$

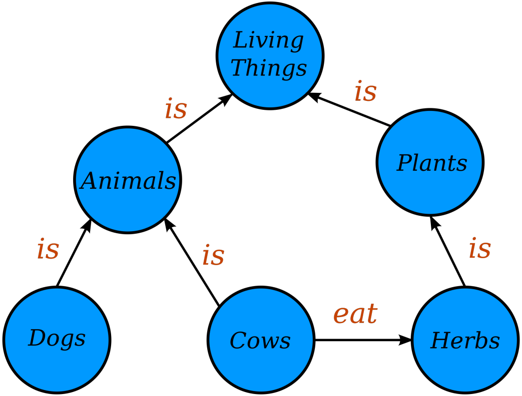
Obarvení politické mapy

Obarvení libovolné mapy tak, aby dvě sousední země nebyly obarveny stejnou barvou (*four color theorem*)

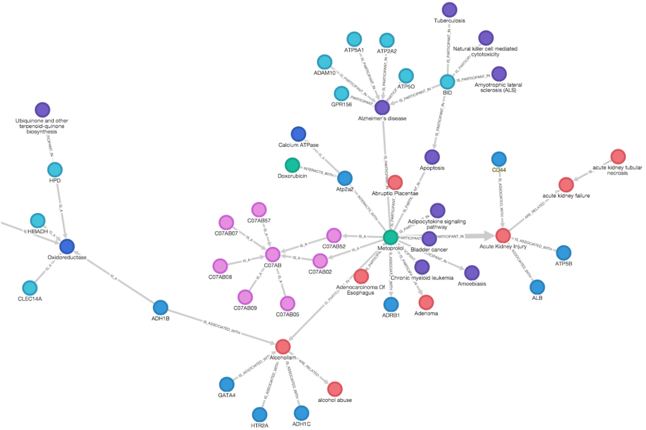


- v roce 1976 dokázáno, že stačí **4 barvy** (*Appel-Haken, 1976*)

Znalostní ontologie



Znalostní ontologie



Praktické využítí

- PageRank
- CPM
- Mapy
- Grafové databáze, ontologie
- Pravděpodobnostní grafické modely
- Jádro grafu v teorii her
- $\cdots$ další optimalizační úlohy