DELTA TopGun

(09) Vyvážené stromy

Luboš Zápotočný, Tomáš Faltejsek, Michal Havelka

2022

Obsah

Definice pojmů a značení

Dokonale vyvážený strom

AVL stromy

Operace s AVL stromy
- LL rotace
- RR rotace
- LR rotace
- RL rotace

Časová složitost operací v AVL stromě

Definice pojmů a značení

Binární strom

Definice pojmů a značení

Binární strom

- je zakořeněný
- každý vrchol má maximálně 2 syny
- rozlišujeme levého a pravého syna

Definice pojmů a značení

Binární strom

- je zakořeněný
- každý vrchol má maximálně 2 syny
- rozlišujeme levého a pravého syna

Levý a pravý syn

- $l(v)$ označujeme levého syna vrcholu v
- $r(v)$ označujeme pravého syna vrcholu v

Definice pojmů a značení

Binární strom

- je zakořeněný
- každý vrchol má maximálně 2 syny
- rozlišujeme levého a pravého syna

Levý a pravý syn

- $l(v)$ označujeme levého syna vrcholu v
- $r(v)$ označujeme pravého syna vrcholu v

Otec

- $p(v)$ označujeme otcovský vrchol vrcholu v

Definice pojmů a značení

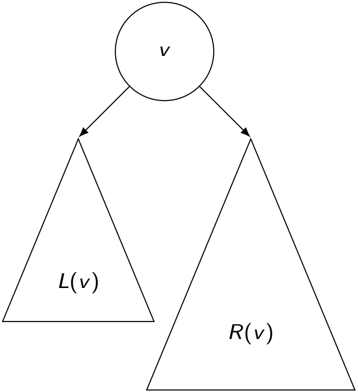
Levý a pravý podstrom

- $L(v)$ označujeme podstrom, ve kterém je kořenem levý syn vrcholu v
- $R(v)$ označujeme podstrom, ve kterém je kořenem pravý syn vrcholu v

Definice pojmů a značení

Levý a pravý podstrom

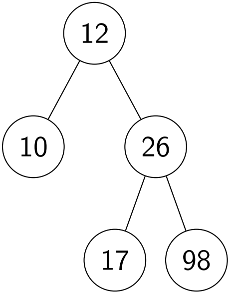
- $L(v)$ označujeme podstrom, ve kterém je kořenem levý syn vrcholu v
- $R(v)$ označujeme podstrom, ve kterém je kořenem pravý syn vrcholu v



Definice pojmů a značení

Hloubka

- $h(T)$, $h(L(v))$ nebo $h(R(v))$ označujeme hloubku stromu
  - Jedná se o počet hladin daného stromu
- $|T|$, $|L(v)|$ nebo $|R(v)|$ označujeme počet vrcholů daného stromu

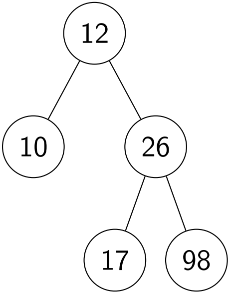


- $h(T) =$

Definice pojmů a značení

Hloubka

- $h(T)$, $h(L(v))$ nebo $h(R(v))$ označujeme hloubku stromu
    - Jedná se o počet hladin daného stromu
- $|T|$, $|L(v)|$ nebo $|R(v)|$ označujeme počet vrcholů daného stromu

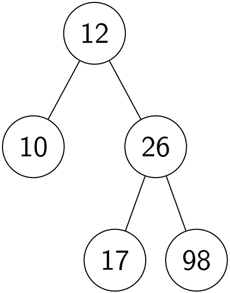


- $h(T) = 3$
- $|T| =$

Definice pojmů a značení

Hloubka

- $h(T)$, $h(L(v))$ nebo $h(R(v))$ označujeme hloubku stromu
    - Jedná se o počet hladin daného stromu
- $|T|$, $|L(v)|$ nebo $|R(v)|$ označujeme počet vrcholů daného stromu

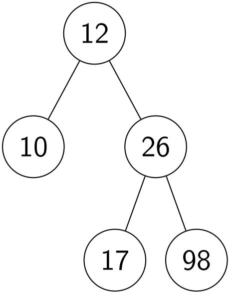


- $h(T) = 3$
- $|T| = 5$
- $|R(root)| =$

Definice pojmů a značení

Hloubka

- $h(T)$, $h(L(v))$ nebo $h(R(v))$ označujeme hloubku stromu
    - Jedná se o počet hladin daného stromu
- $|T|$, $|L(v)|$ nebo $|R(v)|$ označujeme počet vrcholů daného stromu

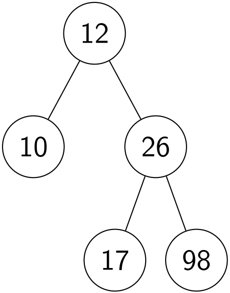


- $h(T) = 3$
- $|T| = 5$
- $|R(root)| = 3$
- $h(R(r(r(p(l(root)))))) =$

Definice pojmů a značení

Hloubka

- $h(T)$, $h(L(v))$ nebo $h(R(v))$ označujeme hloubku stromu
  - Jedná se o počet hladin daného stromu
- $|T|$, $|L(v)|$ nebo $|R(v)|$ označujeme počet vrcholů daného stromu



- $h(T) = 3$
- $|T| = 5$
- $|R(root)| = 3$
- $h(R(r(r(p(l(root)))))) = 0$

Dokonale vyvážený strom

Dokonale vyvážený strom

Binární vyhledávací strom je dokonale vyvážený, pokud pro každý jeho vrchol v platí:

- $\big||L(v)| - |R(v)|\big| \leq 1$

Dokonale vyvážený strom

Dokonale vyvážený strom

Binární vyhledávací strom je dokonale vyvážený, pokud pro každý jeho vrchol v platí:

- $\big||L(v)| - |R(v)|\big| \leq 1$

Tento strom má vždy $1 + \log(n)$ hladin

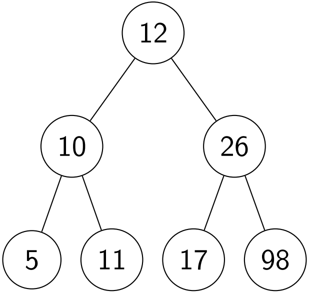
Dokonale vyvážený strom

Dokonale vyvážený strom

Binární vyhledávací strom je dokonale vyvážený, pokud pro každý jeho vrchol v platí:

- $\big||L(v)| - |R(v)|\big| \leq 1$

Tento strom má vždy $1 + \log(n)$ hladin



Problém dokonale vyváženého stromu

Operace **Insert** nebo **Delete** mají vždy časovou složitost $\Omega(n)$ v závislosti na zvolené implementaci

Cílem binárních vyhledávacích stromů je ale zajištění lepší než lineární složitosti

Proto je podmínka dokonalé vyváženosti mírně relaxována

AVL stromy

AVL strom

Binární vyhledávací strom je AVL stromem, pokud pro každý jeho vrchol v platí:

- $\left| h(L(v)) - h(R(v)) \right| \leq 1$

AVL stromy

AVL strom

Binární vyhledávací strom je AVL stromem, pokud pro každý jeho vrchol v platí:

- $\left| h(L(v)) - h(R(v)) \right| \leq 1$

Zároveň pro každý vrchol v urdžujeme hodnotu $\delta(v)$ definovanou:

- $\delta(v) = h(r(v)) - h(l(v))$

AVL stromy

AVL strom

Binární vyhledávací strom je AVL stromem, pokud pro každý jeho vrchol v platí:

- $\left|h(L(v)) - h(R(v))\right| \leq 1$

Zároveň pro každý vrchol v urdžujeme hodnotu $\delta(v)$ definovanou:

- $\delta(v) = h(r(v)) - h(l(v))$

Správně vyvážený AVL strom nabývá těchto hodnot $\delta(v)$:

- $\delta(v) = 0$ pokud jsou oba podstromy stejně hluboké
- $\delta(v) = -1$ pokud má levý podstrom o jedna větší hloubku než pravý podstrom
- $\delta(v) = +1$ pokud má pravý podstrom o jedna větší hloubku než levý podstrom

Operace s AVL stromy

Kdykoli se mění struktura stromu, je nutné provést kontrolu hodnoty $\delta(v)$ a provést některé z následujících rotací:

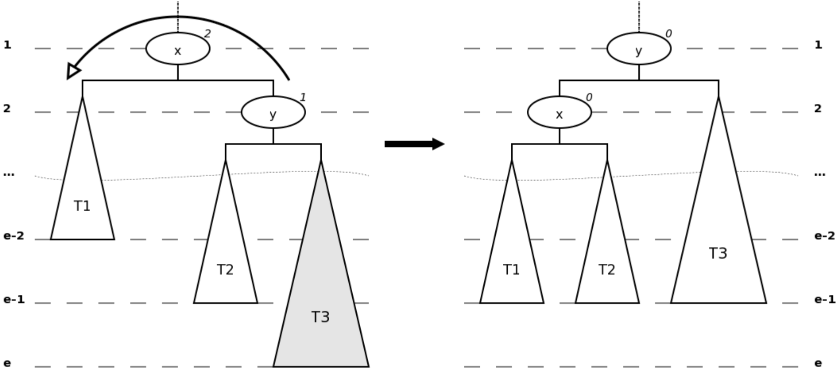
- Levá rotace
- Pravá rotace
- Levo-pravá rotace
- Pravo-levá rotace

Levá rotace

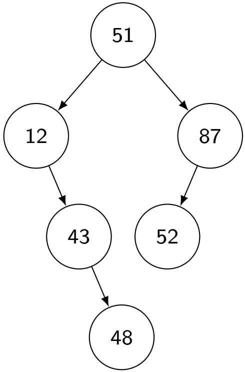
Pokud v některém rodičovském vrcholu nastane hodnota $\delta(v) = +2$ a zároveň pravý potomek má hodnotu $\delta(r(v)) = +1$, provádíme rotaci doleva

Levá rotace

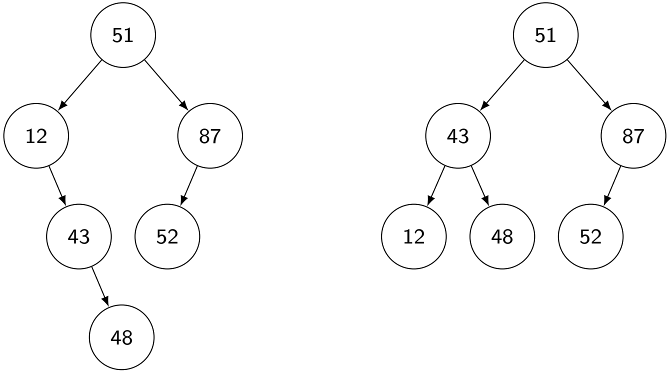
Pokud v některém rodičovském vrcholu nastane hodnota $\delta(v) = +2$ a zároveň pravý potomek má hodnotu $\delta(r(v)) = +1$, provádíme rotaci doleva



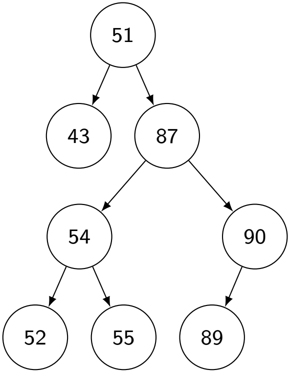
Příklad na levou rotaci



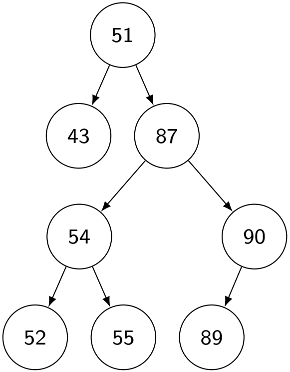
Příklad na levou rotaci

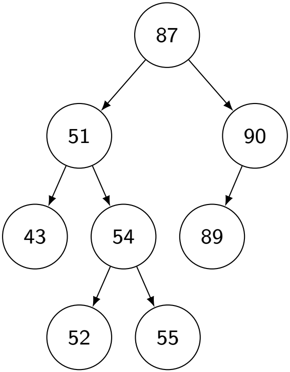


Příklad na levou rotaci



Příklad na levou rotaci



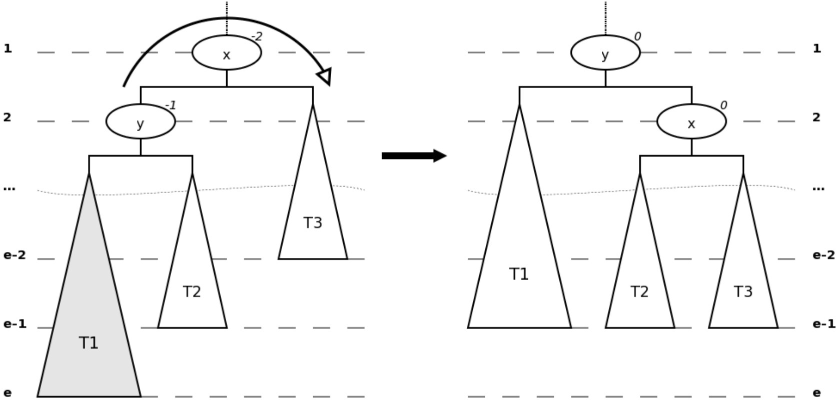


Pravá rotace

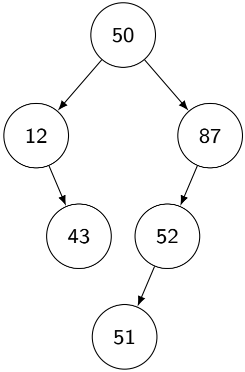
Pokud v některém rodičovském vrcholu nastane hodnota $\delta(v) = -2$ a zároveň levý potomek má hodnotu $\delta(l(v)) = -1$, provádíme rotaci doprava

Pravá rotace

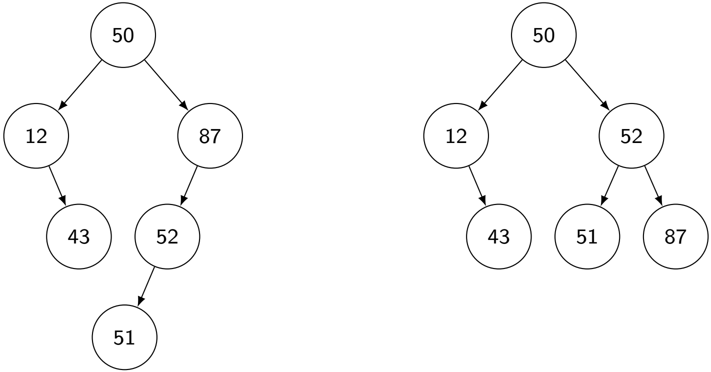
Pokud v některém rodičovském vrcholu nastane hodnota $\delta(v) = -2$ a zároveň levý potomek má hodnotu $\delta(l(v)) = -1$, provádíme rotaci doprava



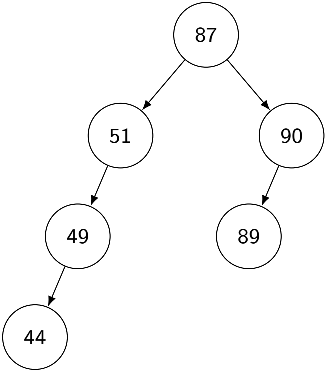
Příklad na pravou rotaci



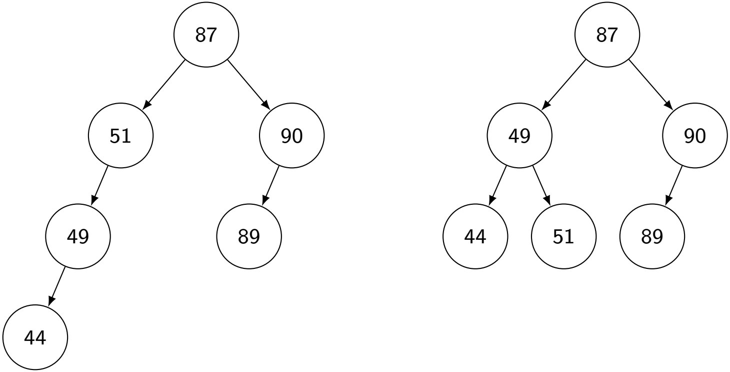
Příklad na pravou rotaci



Příklad na pravou rotaci



Příklad na pravou rotaci

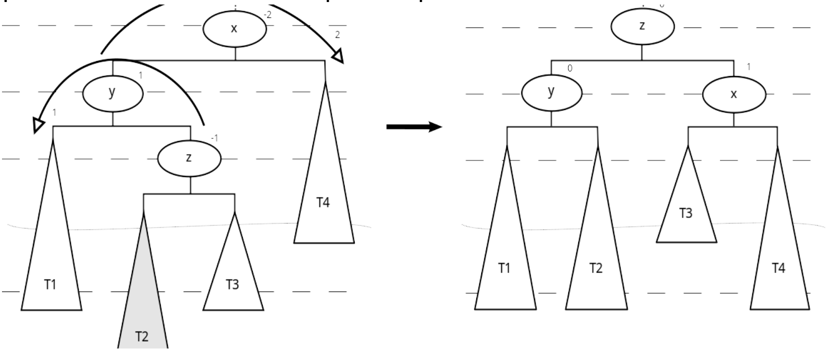


Levo-pravá rotace

Pokud v některém rodičovském vrcholu nastane hodnota $\delta(v) = -2$ a zároveň levý potomek má hodnotu $\delta(l(v)) = +1$, provádíme rotaci doleva a poté doprava

Levo-pravá rotace

Pokud v některém rodičovském vrcholu nastane hodnota $\delta(v) = -2$ a zároveň levý potomek má hodnotu $\delta(l(v)) = +1$, provádíme rotaci doleva a poté doprava



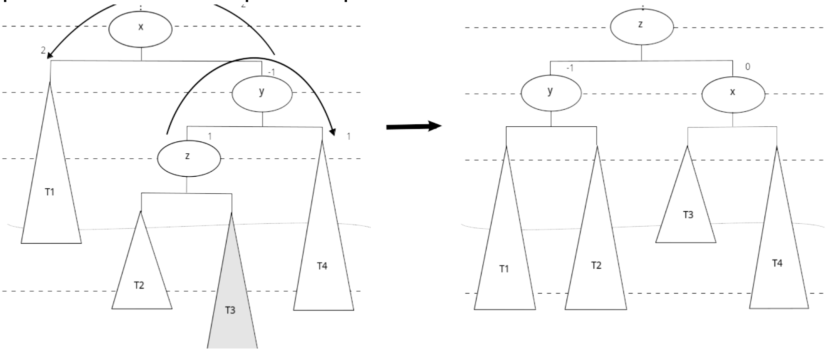
Příklad na levo-pravou rotaci

Pravo-levá rotace

Pokud v některém rodičovském vrcholu nastane hodnota $\delta(v) = +2$ a zároveň pravý potomek má hodnotu $\delta(l(v)) = -1$, provádíme rotaci doprava a poté doleva

Pravo-levá rotace

Pokud v některém rodičovském vrcholu nastane hodnota $\delta(v) = +2$ a zároveň pravý potomek má hodnotu $\delta(l(v)) = -1$, provádíme rotaci doprava a poté doleva



Příklad na pravo-levou rotaci

Časová složitost operací v AVL stromě

Search	$\Theta(\log n)$[1]	$O(\log n)$[1]
Insert	$\Theta(\log n)$[1]	$O(\log n)$[1]
Delete	$\Theta(\log n)$[1]	$O(\log n)$[1]